# Part 1 公式與定義總整理

## (1) Series, Integral, and Transform (非常重要)

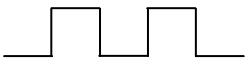
把握不同 transform 之間的「關聯性」，多比較彼此之間相同或相異的地方

| | |
|---|---|
| (1) Laplace Transform | $L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ |
| (2) Fourier series (standard form) | interval: $x \in [-p, p]$<br>$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right)$,<br>$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$,<br>$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$, $a_0, a_n, b_n$: Fourier coefficients |
| (2-1) Fourier series (half range extension form) | interval: $x \in [0, L]$<br>$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{L}x\right)$,<br>$a_0=\frac{2}{L}\int_0^{L}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L}f(x)\cos\frac{2n\pi}{L}xdx$,<br>$b_n=\frac{2}{L}\int_0^{L}f(x)\sin\frac{2n\pi}{L}xdx$, $a_0, a_n, b_n$: Fourier coefficients |
| (3) Fourier cosine series (cosine series) | $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{p}x$<br>$a_0=\frac{2}{p}\int_0^{p}f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{p}\int_0^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$<br>適用情形：<br>(1) interval: $x \in [-p, p]$, $f(x)=f(-x)$<br>(2) interval: $x \in [0, p]$ (half range extension 時) |
| (4) Fourier sine series (sine series) | $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{p}x$<br>$b_n=\frac{2}{p}\int_0^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx$<br>適用情形：<br>(1) interval: $x \in [-p, p]$, $f(x)=-f(-x)$<br>(2) interval: $x \in [0, p]$ (half range extension 時) |

| | |
|---|---|
| (5) Fourier integral | interval: $x \in (-\infty, \infty)$<br>$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [A(\alpha)\cos(\alpha x)+B(\alpha)\sin(\alpha x)]\,d\alpha$<br>$A(\alpha)=\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(\alpha x)dx \qquad B(\alpha)=\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx$ |
| (6) Fourier cosine integral (或 cosine integral) | $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty A(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha$, $\quad A(\alpha)=\int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)dx$<br>適用情形：<br>(1) interval: $x \in (-\infty,\infty)$, $f(x)=f(-x)$ (standard)<br>(2) interval: $x \in [0, \infty)$ (half range extension 時) |
| (7) Fourier sine integral (或 sine integral) | $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha$, $\quad B(\alpha)=\int_0^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx$<br>適用情形：<br>(1) interval: $x \in (-\infty,\infty)$, $f(x)=f(-x)$ (standard)<br>(2) interval: $x \in [0, \infty)$ (half range extension 時) |
| (8) Fourier transform (即 Fourier integral of complex form，或 Fourier integral of exponential form) | interval: $x \in (-\infty, \infty)$<br>$\Im[f(x)]=\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{j\alpha x}dx=F(\alpha)$ |
| (8-1) inverse Fourier transform | $\Im^{-1}[F(\alpha)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(\alpha)e^{-j\alpha x}d\alpha=f(x)$ |
| (9) Fourier cosine transform | $\Im_c[f(x)]=\int_0^\infty f(x)\cos(\alpha x)dx=F(\alpha)$<br>適用情形：<br>(1) interval: $x \in (-\infty,\infty)$, $f(x)=f(-x)$ (standard)<br>(2) interval: $x \in [0, \infty)$ (half range extension 時) |
| (9-1) inverse Fourier cosine transform | $\Im_c^{-1}[F(\alpha)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha=f(x)$ |
| (10) Fourier sine transform | $\Im_s[f(x)]=\int_0^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx=F(\alpha)$<br>適用情形：<br>(1) interval: $x \in (-\infty,\infty)$, $f(x)=-f(-x)$ (standard)<br>(2) interval: $x \in [0, \infty)$ (half range extension 時) |
| (10-1) inverse Fourier sine transform | $\Im_s^{-1}[F(\alpha)]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\sin(\alpha x)d\alpha=f(x)$ |

## (2) 和 Laplace Transform 相關的公式 (很重要)

| | |
|---|---|
| Laplace transform | $L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ |
| Differentiation<br>$L\{f^{(n)}(t)\}=$ | $s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ |
| Multiplication by $t$<br>$L\{t^n f(t)\}=$ | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$ |
| Integration | $L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{F(s)}{s}$ |
| Multiplication by exp | $L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)$ |
| Translation (I) | $L\{f(t-a)u(t-a)\}=e^{-as}F(s)$ |
| Translation (II) | $L\{g(t)u(t-a)\}=e^{-as}L\{g(t+a)\}$ |
| Convolution property | convolution: $y(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$<br>$L\{y(t)\}=F(s)G(s)$ |
| Periodic input<br>If $f(t)=f(t+T)$ | $L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt$ |
| $L\{1\}=$ | $1/s$ |
| $L\{u(t)\}=$ | $1/s$ |
| $L\{t^n\}=$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $L\{\exp(at)\}=$ | $\frac{1}{s-a}$ |
| $L\{\sin(kt)\}=$ | $\frac{k}{s^2+k^2}$ |
| $L\{\cos(kt)\}=$ | $\frac{s}{s^2+k^2}$ |
| $L\{\sinh(kt)\}=$ | $\frac{k}{s^2-k^2}$ |

| | |
|---|---|
| $L\{\cosh(kt)\} =$ | $\dfrac{s}{s^2-k^2}$ |
| $L\{t\sin(kt)\} =$ | $\dfrac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$ |
| $L\{t\cos(kt)\} =$ | $\dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$ |
| ※ $L\{t\sinh(kt)\} =$ | $\dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$ ※ 代表量力而爲，時間夠才記的公式 |
| ※ $L\{t\cosh(kt)\} =$ | $\dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$ |
| $L\{u(t-t_0)\} =$ | $\dfrac{e^{-t_0 s}}{s}$ |
| $L\{\delta(t)\} =$ | 1 |
| $L\{\delta(t-t_0)\} =$ | $e^{-t_0 s}$ |
| ※ $L\{f(t)\}$  $f(t) = 1$ for $0 < a < 1$<br>$f(t) = 0$ for $1 < a < 2$<br>$f(t) = f(t+2a)$ | $\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$ |

**(3) 常用積分表**

| | |
|---|---|
| $\int \frac{1}{x} dx =$ | $\ln\|x\| + c$ |
| $\int x\, e^{ax}\, dx =$ | $\dfrac{e^{ax}}{a}\left(x-\dfrac{1}{a}\right)+c$ |
| ※ $\int x^2 e^{ax}\, dx =$ | $\dfrac{e^{ax}}{a}\left(x^2-\dfrac{2x}{a}+\dfrac{2}{a^2}\right)+c$ |
| $\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\, dx =$ | $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}+c$ |
| $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx =$ | $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}+c$ |
| $\int \sin x\, dx =$ | $-\cos x + c$ |
| $\int \cos x\, dx =$ | $\sin x + c$ |

**(4) Hyperbolic functions**

| | |
|---|---|
| cosh$x$ = | $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ |
| sinh$x$ = | $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ |
| cosh($-x$) = | cosh($x$) |
| sinh($-x$) = | $-$sinh($x$) |
| sinh(0) = | 0 |
| cosh(0) = | 1 |
| $\left.\frac{d}{dx}\cosh x\right\|_{x=0}$ = | 0 |
| $\frac{d}{dx}\cosh x$ = | sinh($x$) |
| $\frac{d}{dx}\sinh x$ = | cosh($x$) |

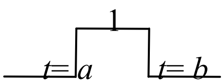
**(5) Chapter 6 的相關公式與定義 (頗多，註明 ※ 者，若時間有限，則不需硬記)**

| | |
|---|---|
| Analytic 的定義 | $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0)\cdots\cdots$ 皆爲 finite<br>則 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 這一點爲 analytic (Section 6.1) |
| (i) ordinary point<br><br>(ii) regular singular point<br><br>(iii) irregular singular point | 先將 DE 變成 standard form：<br>$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots\cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0$<br>($y^{(n)}$ 的 coefficient 變成 1)<br>(i) 若 $P_0(x), P_1(x), \ldots. P_{n-1}(x)$, 在 $x = x_0$ 這一點爲 analytic,<br>則 $x_0$ 爲 **ordinary point**<br><br>(ii) 若 $P_0(x), P_1(x), \ldots. P_{n-1}(x)$, 在 $x = x_0$ 不爲 analytic,<br>但 $(x-x_0)^n P_0(x), (x-x_0)^{n-1} P_1(x), \ldots\ldots (x-x_0)P_{n-1}(x)$ 在 $x = x_0$ 爲 analytic, 則 $x_0$ 爲 **regular singular point**<br><br>(iii) 以上二條件皆不滿足，則 $x_0$ 爲 **irregular singular point** |

| | |
|---|---|
| regular singular point 的情形下， $r_2 - r_1 =$ **integer** 時，有時(並非所有情況) 要用這個式子求 $y_2(x)$ | $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ |
| Bessel's equation of order $v$ | $x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$ |
| Legendre's equation of order $n$ | $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ |
| ※ Gamma function | $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ |
| Gamma function 和 $n!$ 之間的關係 | $\Gamma(n+1) = n!$ when n is a positive integer $\Gamma(1) = 0! = 1$ |
| $\Gamma(x+1) =$ | $x\Gamma(x)$ |
| ※ Gamma function 幾個特殊值 | $\Gamma(n) \to \infty$ when $n$ is a negative integer or $n = 0$<br>$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ |
| ※ Bessel functions of the first kind of order $v$ | $J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1+v+n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}$ |
| ※ Bessel function of the second kind of order $v$ | $Y_v(x) = \frac{\cos v\pi J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin v\pi}$<br>$v$ 是整數時，用 L'Hopital's rule 來算 |
| Solutions of Bessel's equation of order $v$ | $c_1J_v(x) + c_2Y_v(x)$ |
| spherical Bessel functions | $J_v(x)$, $v = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots\ldots\ldots$ |
| ※ Bessel functions 在 0 的地方的值 | $J_0(0) \neq 0$, $J_m(0) = 0$ 當 $m = 1, 2, 3, \ldots$,<br>$\lim_{x\to 0} Y_m(x) = -\infty$ 當 $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, |
| $J_m(-x) =$ | $(-1)^m J_m(x)$ (當 $m$ 爲整數時) |
| Bessel function 的變型 (一) | $x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - v^2)y = 0$ 的解爲<br>$c_1J_v(\alpha x) + c_2Y_v(\alpha x)$ |

| | |
|---|---|
| ※ Bessel function 的變型 (二) | $x^2y''+(1-2a)xy'+(b^2c^2x^{2c}+a^2-p^2c^2)y=0$ 的解爲<br>$y=x^a\left[c_1J_p(bx^c)+c_2Y_p(bx^c)\right]$ |
| ※ Modified Bessel function | $x^2y''+xy'-(x^2+v^2)y=0$ 的解爲 $c_1I_v(x)+c_2K_v(x)$ |
| ※ modified Bessel function of the first kind of order $v$ | $I_v(x)=i^{-v}J_v(ix)$ |
| ※ modified Bessel function of the second kind of order $v$ | $K_v(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-v}(x)-I_v(x)}{\sin v\pi}$ |
| Legendre polynomial | One of the solution of the Legendre's equation of order $n$<br>Denoted by $P_n(x)$ |
| $P_n(-x)=$ | $(-1)^n\ P_n(-x)$ |
| $P_n(0)=$ | 0 when $n$ is odd |
| $P_n'(0)=$ | 0 when $n$ is even |
| ※ orthogonality for Legendre polynomials | $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=0$ if $m\neq n$ (orthogonality) |

**(6) Chapter 7 的相關公式與定義**

| | |
|---|---|
| of exponential order | $\lvert f(t)\rvert\le Me^{ct}$ |
| Step function | $u(t-a)=1$ for $t>a$, $u(t-a)=0$ for $t<a$, |
| <br>以 step function 表示 | $u(t-a)-u(t-b)$ |
| Dirac delta function (又稱 unit impulse function ) | $\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty & \text{for } t=t_0\\ 0 & \text{for } t\neq t_0\end{cases}$ |
| convolution (旋積)<br>很重要，一定要會 | $f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 這裡 * 代表旋積 |
| Integration for $\delta(t-t_0)$ | $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$ |

| | |
|---|---|
| Sifting property for $\delta(t-t_0)$ | $\int_p^q f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$ |
| Relation between $\delta(t-t_0)$ and the step function | $\int_{-\infty}^t \delta(\tau-t_0)d\tau = u(t-t_0)$ $\quad \frac{d}{dt}u(t-t_0) = \delta(\tau-t_0)$ |

**(7) Chapter 8 的相關公式與定義**

(a) solutions for homogeneous linear system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$，

$\lambda_a$: eigenvalue of **A**, **K**$_a$: the corresponding eigenvector

| | |
|---|---|
| Case 1:<br>$\lambda_a$ 不為重根且為 real (multiplicities 為 1) | $\mathbf{X}_a = \mathbf{K}_a e^{\lambda_a t}$ 是 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ 的其中一個解 |
| Case 2:<br>$\lambda_a$ 的 multiplicities 為 $m$ | **(1)** 完全能找到 $\lambda_a$ 的 $m$ 個 linearly independent eigenvectors<br>$\mathbf{X}_a = \mathbf{K}_a e^{\lambda_a t}$ (**K**$_a$ 有 $m$ 個可能解)<br>是 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ 的其中 $m$ 個解<br>(參考講義 541-544 頁的例子)<br>**(2)** 只能找到 $\lambda_a$ 所對應的 一個 linearly independent eigenvectors **K**$_{a,1}$<br>$\mathbf{X}_{a,1} = \mathbf{K}_{a,1} e^{\lambda_a t}$<br>$\mathbf{X}_{a,2} = \mathbf{K}_{a,1} t e^{\lambda_a t} + \mathbf{K}_{a,2} e^{\lambda_a t}$<br>: :<br>$\mathbf{X}_{a,m} = \mathbf{K}_{a,1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_a t} + \mathbf{K}_{a,2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_a t} + \cdots\cdots + \mathbf{K}_{a,m} e^{\lambda_a t}$<br>是 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ 的其中 $m$ 個解<br>其中 $(\mathbf{A}-\lambda_a \mathbf{I})\mathbf{K}_{a,2} = \mathbf{K}_{a,1}$, $(\mathbf{A}-\lambda_a \mathbf{I})\mathbf{K}_{a,3} = \mathbf{K}_{a,2}$, ……<br>$(\mathbf{A}-\lambda_a \mathbf{I})\mathbf{K}_{a,m} = \mathbf{K}_{a,m-1}$,<br>(參考講義 548-550 頁的例子)<br>**(3)** 若能找到 $\lambda_a$ 所對應的 超過 1 個，但不到 $m$ linearly independent Eigenvectors：<br>採用「混合」的方法<br>(參考講義 551, 554 頁的例子) |

| | |
|---|---|
| Case 3:<br>$\lambda_a = \alpha + j\beta$, $\lambda_b = \alpha - j\beta$ 皆為 eigenvalues | 當 $\mathbf{K_a} = \mathbf{B_1} + j\mathbf{B_2}$ 為 $\lambda_a$ 所對應的 eigenvector<br>$\lambda_b$ 所對應的 eigenvectors 必為 $\mathbf{K_b} = \mathbf{B_1} - j\mathbf{B_2}$<br>$\mathbf{X_a} = [\mathbf{B_1}\cos\beta t - \mathbf{B_2}\sin\beta t]e^{\alpha t}$<br>$\mathbf{X_b} = [\mathbf{B_2}\cos\beta t + \mathbf{B_1}\sin\beta t]e^{\alpha t}$ 是 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ 的其中二個解 |

(b) solutions for nonhomogeneous linear system $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ ，

| | |
|---|---|
| 方法一：undetermined coefficients | Particular solution<br>**F** 中有什麼，則 particular solution 每一項都要有什麼 (參考講義 566-570 頁的範例)<br>再加上 homogeneous 部分的 solution，即爲解 |
| 方法二：variation of parameters | 原式： $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$<br>解： $\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} + \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{F}(t)dt$<br>$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ constants $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}$<br>$\mathbf{\Phi}(t)$ 的每一個 column 是 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ 的 一個解<br>(即 solutions of the homogeneous part) |
| 方法二：variation of parameters (with initial conditions) | 原式： $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X_0}$<br>解： $\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{X_0} + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(\tau)\mathbf{F}(\tau)d\tau$ |

(c) Matrix Exponential

| | |
|---|---|
| $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ | 解： $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C}$ $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ 爲 constants |
| $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ | 解： $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{C} + e^{\mathbf{A}t}\int e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{F}(t)dt$ |
| $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}+\mathbf{F}$， $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X_0}$ | 解： $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{X_0} + e^{\mathbf{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{F}(\tau)d\tau$ |

| | |
|---|---|
| $e^{\mathbf{A}t}$ 的算法 | 方法一：<br>$e^{\mathbf{A}t}=L^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]$ $L^{-1}$: inverse Laplace transform<br>方法二： eigenvector-eigenvalue decomposition |

(d) 解法小技巧

| | |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}=$ | $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ |
| $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的 eigenvectors | 若 eigenvalues 爲 $\lambda$, 當 $b\neq 0$, eigenvector 爲 $\begin{bmatrix} -b & a-\lambda \end{bmatrix}^T$<br>當 $b=0, c\neq 0$, eigenvector 爲 $\begin{bmatrix} d-\lambda & -c \end{bmatrix}^T$. |

**(8) Chapter 11 的相關公式與定義**

| | |
|---|---|
| inner product | $(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x) f_2(x)dx$ |
| orthogonal | $(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x) f_2(x)dx=0$ |
| square norm | $\lVert f(x)\rVert^2=(f(x), f(x))=\int_a^b f^2(x)dx$ |
| norm | $\lVert f(x)\rVert=\sqrt{(f(x), f(x))}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$ |
| inner product with weight function | $(f_1, f_2)=\int_a^b w(x) f_1(x) f_2(x)dx$ |
| orthogonal with respect to a weight function | $(f_1, f_2)=\int_a^b f_1(x) f_2(x) w(x)dx=0$ |
| ※ square norm with respect to a weight function | $\lVert f(x)\rVert^2=(f(x), f(x))=\int_a^b f^2(x) w(x)dx$ |
| ※ norm with respect to a weight function | $\lVert f(x)\rVert=\sqrt{(f(x), f(x))}=\sqrt{\int_a^b f^2(x) w(x)dx}$ |
| normalize | $\psi(x) \longrightarrow v(x)=\frac{\psi(x)}{\lVert\psi(x)\rVert}$ 註：$\lVert v(x)\rVert=1$ |

| | |
|---|---|
| orthogonal set | If $(\phi_m(x), \phi_n(x)) = 0$ for $m \neq n$<br>$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots\ldots\}$ is an orthogonal set<br>註： $(\phi_m(x), \phi_n(x))$ 指的是 $\phi_m(x)$ 和 $\phi_n(x)$ 的 inner product |
| orthonormal set | If $(\phi_m(x), \phi_n(x)) = 0$ for $m \neq n$ $(\phi_n(x), \phi_n(x)) = 1$<br>$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots\ldots\}$ is an orthonormal set |
| orthogonal series expansion | $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ where $c_n = \frac{(f(x), \phi_n(x))}{(\phi_n(x), \phi_n(x))}$ |
| 算 Fourier coefficients 時經常用到 | $\int_a^b u(t) v'(t) dt = u(t) v(t)\Big\|_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$ |
| 在不連續的點 | If $f(x)$ is not continuous at $x_0$<br>and $f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right)$<br>then $f_1(x_0) = \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$ |
| even and odd | If $f(x)$ is even, $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2\int_0^a f(x) dx$<br>If $f(x)$ is odd, $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0$ |
| $\cos(n\pi)$ and $\sin(n\pi)$ | $\cos(n\pi) = (-1)^n$ $\sin(n\pi) = 0$ |

**(9) Chapter 12 的相關公式與定義**

| | |
|---|---|
| hyperbolic | for $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$<br>$B^2 - 4AC > 0$ |
| elliptic | 同上，但 $B^2 - 4AC < 0$ |
| parabolic | 同上，但 $B^2 - 4AC = 0$ |
| heat equation (one-dimensional heat equation) | $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ $k > 0$ |
| wave equation (one-dimensional wave equation) | $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ |

| | |
|---|---|
| Laplace's equation (two-dimensional form of Laplace's equation) | $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ |
| Laplacian: $\nabla^2$ | $\nabla^2 u(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$<br>$\nabla^2 u(x,y,x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ |
| Dirichlet condition | $u=\ldots\ldots$ |
| Neumann condition | $\frac{\partial u}{\partial n}=\cdots\cdots$ |
| Robin condition | $\frac{\partial u}{\partial n}+hu=\cdots\cdots$ |
| $X''(x)+\lambda X(x)=0$<br>$X(0)=0 \quad X(L)=0$ | 解： $X(x)=c_2\sin\frac{n\pi}{L}x$, $\lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$ |
| $X''(x)+\lambda X(x)=0$<br>$X'(0)=0 \quad X'(L)=0$ | 解： $X(x)=c_1$ $\lambda=0$<br>或 $X_n(x)=c_1\cos\frac{n\pi}{L}x$ $\lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ $n=1, 2, 3, \ldots\ldots$ |

**(10) Chapter 14 的相關公式與定義**

| | |
|---|---|
| Differentiation property for Fourier transform | $\Im[f'(x)]=-j\alpha F(\alpha)$ $\Im[f^{(n)}(x)]=(-j\alpha)^n F(\alpha)$ |
| Differentiation property for Fourier cosine transform | $\Im_c[f'(x)]=\alpha\,\Im_s[f(x)]-f(0)$<br>$\Im_c[f''(x)]=-\alpha^2\,\Im_c[f(x)]-f'(0)$ |
| Differentiation property for Fourier sine transform | $\Im_s[f'(x)]=-\alpha\,\Im_c[f(x)]$<br>$\Im_s[f''(x)]=-\alpha^2\Im_s[f(x)]+\alpha f(0)$ |
| ※ Integral for sinc functions | $\int_0^\infty\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$ |

**(11) Taylor series**

| | |
|---|---|
| $f(x) =$ | $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^m}{m!} f^{(m)}(x_0)$ |
| $\exp(x) =$ | $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$ |
| $\sin(x) =$ | $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$ |
| $\cos(x) =$ | $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$ |

**(12) 三角函式表**

| | |
|---|---|
| $\cos(a+b) =$ | $\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ |
| $\sin(a+b) =$ | $\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ |
| $\cos(a-b) =$ | $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ |
| $\sin(a-b) =$ | $\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ |
| $\cos(a)\cos(b) =$ | $[\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$ |
| $\sin(a)\sin(b) =$ | $[-\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$ |
| $\sin(a)\cos(b) =$ | $[\sin(a+b) + \sin(a-b)]/2$ |
| $\cos(2a) =$ | $\cos^2(a) - \sin^2(a)$ or $1 - 2\sin^2(a)$ or $2\cos^2(a) - 1$ |
| $\sin(2a) =$ | $2\sin a \cos a$ |
| $\cos^2 a =$ | $[\cos(2a) + 1]/2$ |
| $\sin^2 a =$ | $[1 - \cos(2a)]/2$ |

公式雖然多，但是把握彼此之間的關係，就可以較快地記起來

# Part 2 「解法」總整理

## (一) $n^{\text{th}}$ order linear DE 的 series solutions 解法

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots\cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0 \qquad P_m(x) = \frac{a_m(x)}{a_n(x)}$$

**(Case 1)** 條件：當 $x_0$ 爲 ordinary point 時

方法： 假設 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ ，代入原式

流程： 5 個 steps, 參考講義 344 頁，

範例： 講義 345-353 頁

**Interval of convergence** 的判斷方法：

(1) 找出 $\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$ 的條件 (較嚴謹，較正確)

(2) 直接把 interval of convergence 寫成 $|x - x_0| < R$ , $R$ 是 $x_0$ 和最近的 singular point 之間的距離

**(Case 2)** 條件：當 $x_0$ 爲 regular singular point 時

方法： 假設 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ ，代入原式

流程： 7 個 steps, 參考講義 362-363 頁，

範例：講義 370-378 頁

註： **Case 2** ($x_0$ 爲 regular singular point 時) 又根據 **indicial equations** 分成三種情形

**indicial equations:** $(x - x_0)^p$ 當指數 $p$ 爲最小的這一項的係數，稱作 indicial equations，參考講義 364 頁

以下針對 $2^{\text{nd}}$ order DE 的情形作討論

(此時 indicial equations 有 $r_1, r_2$ 兩個 roots)

**(Case 2-1)** $r_1 \neq r_2$ and $r_1, r_2$ are real, $\boldsymbol{r_2 - r_1 \neq}$ **integer**

兩個解都爲 $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ 的型態，可直接用講義 362 頁的方法

**(Case 2-2)** $r_1 \neq r_2$ and $r_1, r_2$ are real, **$r_2 - r_1$ = integer**

(A) 先用講義 362 頁的方法嚐試能否解出 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r}$ 的型態的兩個 independent solutions

(B) 若用講義 362 頁的方法只能得出一個 independent solution $y_1(x)$

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r_1}$$

則必需根據 $y_2(x)=y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$ 和長除法解出第二個 independent solution $y_2(x)$

**(Case 2-3)** $r_1 \neq r_2$ and $r_1, r_2$ are complex，不在本書討論範圍

## (二) Laplace transform 解 DE 的方法

方法：

DE → Laplace transform → 計算 → 分解因式(若需要的話) → inverse Laplace transform

範例： 講義 442, 443 頁

主要精神：把微分簡化爲乘法

- **DE → Laplace transform**：

$$a_n y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1 y'(x)+a_0 y=g(x) \quad \rightarrow P(s)Y(s) = Q(s) + G(s)$$

**$P(s)$: 即 auxiliary function, $Q(s)$: 來自 initial conditions**

計算 **$Q(s)$** 的快速法

參考講義 444, 445 頁

- **分解因式的方法 (Cover up method)**

$$\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)^2\cdots\cdots(s-a_N)}=\frac{A_1}{s-a_1}+\frac{A_2}{s-a_2}+\cdots+\frac{A_n+B_n(s-a_n)}{(s-a_n)^2}+\cdots+\frac{A_N}{s-a_N}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_N$ 互異

則 $$A_n=\left.\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_{n-1})\cancel{(s-a_n)}(s-a_{n+1})\cdots\cdots(s-a_N)}\right|_{s=a_n}$$

$$B_n=\left.\frac{d}{ds}\frac{K(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots\cdots(s-a_{n-1})(s-a_{n+1})\cdots\cdots(s-a_N)}\right|_{s=a_n}$$

## (三) Systems of Linear First-Order Differential Equations 的解法

假設我們可以把問題變成

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots\cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots\cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{d}{dt}x_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots\cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t)$$

($\frac{d}{dt}x_m(t)$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ 的係數皆為 1)

先改寫成 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

**[第一種解法]：使用 Sections 8-2, 8-3**
(詳細規則，請參考前面所整理的公式表)

**(A) Homogeneous 的部分的解 (Section 8-2)**

$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$

先找 eigenvalues and eigenvectors of **A**

$\mathbf{AK_a} = \lambda_a \mathbf{K_a}$ $\quad a = 1, 2, \ldots., n$

$\lambda_a$: eigenvalues, $\mathbf{K_a}$: eigenvectors,

再根據講義 526-528 頁的規則，來找出 $n$ 個 linearly independent eigenvectors

**(B) Particular solutions (Section 8-3)**

(方法 1) Undetermined coefficients (用猜的) (講義 564-570 頁)

(方法 2) Variation of parameters (講義 571-576 頁)

**(C) Homogeneous 的部分的解和 Particular solutions 相加，即為 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$ 的解**

[第二種解法]

**Matrix exponential** $e^{At}$ **(Section 8-4)**，不建議使用

(詳細規則，請參考前面所整理的公式表)

## (四) 用 Fourier Series 來解 Particular Solutions

精神：當 $f(t) = f(t-p)$ 時，將 f(t) 表示成 $\cos\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$, $\sin\left(\frac{n\pi}{p}t\right)$ 的 linear combination

流程： 見講義 645, 646 頁

範例： 見講義 647-650 頁

## (五) Partial Differential Equations 的解法 (一)

### 用 Separation of Variables

精神： 例如當 independent variables 爲 $x$ and $y$ 時，

假設 $u(x,y) = X(x)Y(y)$，代入原式

使得 **PDE** ⟶ **ODE**

流程： 7 個 Steps, 講義 717-719 頁 (非常重要，請熟悉)

注意： (1) 其中 Steps 3, 4, 5 要分成不同的 cases 來解

(2) 處理 boundary value problems 時，

要將 Steps 3, 4, 5 所有的解都加起來 (Step 6)

(3) 經常把 $d_1e^{2\alpha x} + d_2e^{-2\alpha x}$ 表示成 $c_4 \cosh(2\alpha x) + c_5 \sinh(2\alpha x)$

(4) "等於零" 的 IVP 或 BVP 先於 Steps 3, 4 處理

例如， $u(L, y) = 0 \rightarrow X(L) = 0$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \quad \rightarrow Y'(b) = 0.$$

"不等於零" 的 IVP 或 BVP，要在 Step 7 當中處理

(5) 當 IVP, BVP 皆不爲零時，要用 superposition principle 分成兩個子問題

(參考講義 771, 772 頁)

(6) 其他需注意的地方：整理於講義 775-778 頁

範例： 講義 722-725 頁 (無 boundary condition)

講義 745-753 頁的 wave equation

講義 761-769, 770, 772-774 頁的 Laplace's equation

Sections 12.1, 12.2, 12.4, 12.5 的練習題

## (六) Partial Differential Equations 的解法 (二)

### 用 Fourier Transform (或 Fourier Cosine, Sine Transforms)

精神： 藉由 Fourier transform (或 Fourier cosine transform , Fourier sine transform)，將針對其中一個變數的偏微分變成乘法

方法： (A) interval 為 $-\infty < v < \infty$ 時 → **用 Fourier transform**

(B) interval 為 $0 < v < \infty$

而且有 $u(v, \ldots\ldots) = 0$ when $v = 0$ 的 initial condition 時

→ **用 Fourier sine transform**

(C) interval 為 $0 < v < \infty$

而且有 $\frac{\partial}{\partial v} u\left(v, \cdots\cdots\right) = 0$ when $v = 0$ 的 initial condition 時

→ **用 Fourier cosine transform**

流程： 5 個 Steps, 講義 696 頁 (有一些複雜，請多練習)

範例： 講義 697-703 頁及 Section 14-4 的練習題

需注意的地方：整理於講義 704, 705 頁

(尤其注意其中第五點)

## Part 3 補充

同學們若覺得以上的整理，還漏掉哪些公式、定義、或解法，就在這邊補充吧！